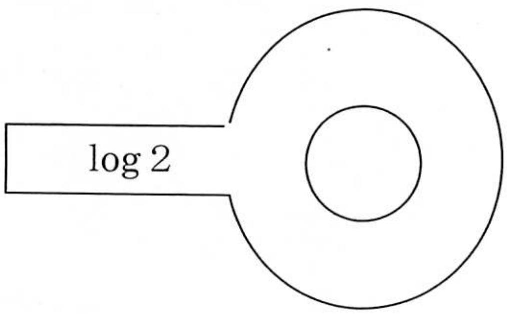
対数メガネと底の変換

氏家　英夫（北海道）

対数メガネによる導入

対数関数は指数関数の逆関数ですが，教科書にあるような　$a^x = b \Leftrightarrow x = log_a b$　という定義と，これに基づく対数表現への書き換えによる導入は，対数の本来の意味を明らかにするものにはなっていません。対数は，自然や社会に広く存在する指数現象を，人間にとって把握しやすい比例的変化に変えるメガネの役割を果たすということに，その意味があります。

新聞紙百回折りなど，指数現象が人間にとって予想しにくいということを印象付けるための問題を最初に扱った後，「このように人間にとって指数現象というものは大変わかりづらく，予想もしにくい。そこで人間は指数現象を見る便利なメガネとして対数 log というものを発明しました」として対数メガネを導入します。下の図のような画用紙を切り抜いたメガネを用意し，「この不思議なメガネで見ると，8が3に見える……」などと進めます。



真数—対数の対数表

対数の計算規則について，指数的変化と比例的変化を対応させた「対数表」のプリントをもとに授業を展開します。

x どうしのかけ算が下の y どうしのたし算に対応していること，そのことで計算がきわめて簡単になることを確かめます。そのうえで $\log_a$ の対数表を使って一般化すれば，対数の計算規則

Ⅰ　$\log_a MN = \log_a M + \log_a N$

Ⅱ　$\log_a \dfrac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$

Ⅲ　$\log_a M^p = p\log_a M$

を対数メガネの性質として，自然に導くことができます。

底の変換

このような視点から底の変換公式を考えたとき，その意味することは<ひとつの指数現象に対して底の異なる対数表どうしは比例している>ということにあります。例えば1時間で2倍になるバクテリアの量 $x = 2^t$ を底の異なる2つのメガネ $\log_2$ と $\log_8$ で見た対応表をつくると，対数どうしが

$\log_8 x = \dfrac{1}{3}\log_2 x$　という形で比例していることが簡単にわかります。このように $\log_a x$ と $\log_c x$ とが

$$\log_a x = A\log_c x$$

という形で比例しており，この時の比例定数 A が逆数になるのですから，底の変換公式は

$$\log_a x = \frac{1}{\log_c a}\log_c x$$

と表すのが，最もその本質を表現していると思います。

（白樺学園高校）

対数表

問題　1時間で2倍になるバクテリア1gがある。このバクテリアの重さの変化の様子を1時間毎に見ると下のxのようになる。このxに対応させてyとして$\log_2$のメガネで見える値を書きなさい。

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024
y													

このような表を、2を底とする対数表という。
この対数表をつかうとxのかけ算をlog どうしのたし算で計算できる。

例　　　　8×16=　　　を求める
　　　　　　↓　↓　↑
$\log_2$ で見ると　3+ 4 = 7

わり算はどうか
　　　　　　256÷32=　　　を求める
　　　　　　↓　↓　↑
$\log_2$ で見ると　8−5= 3

練習　対数表をつかって、次の計算をしなさい。

① 64×32　　② 16×16　　③ 1024÷64

④ $512\times\frac{1}{16}$　　⑤ $4\div\frac{1}{8}$　　⑥ $\frac{1}{2}\div\frac{1}{2}$

底の変換

1つの指数現象例えば1時間で2倍になるバクテリアの量$x=2^n$を底の異なる$\log_2$のメガネと、$\log_8$のメガネで見た対数表を比較してみる。

	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024
$\log_2$			0	1		3			6			9	
$\log_8$			0			1			2			3	

問題　対数表の空いている$\log_2 x$、$\log_8 x$の値を書き入れなさい。

底を2から8に変える場合、$\log_8 x$の値は$\log_2 x$の値に$\frac{1}{3}$かければ良い。この3という値は$\log_2$のメガネで8を見た値になっている。つまり

$$\log_8 x = \frac{1}{\log_2 8} \times \log_2 x$$

となっている。

一般に、底の異なる対数表どうしは比例しているので、底をaからcに変えるためには

$$\log_a x = \frac{1}{\log_c a} \times \log_c x$$

とすればよい。これを底の変換公式という。